Opérateur différentiel gradient

I. Taux de variation ; notion de gradient

1. Définition

Nous avons vu au cours du chapitre sur les différentielles que l'on pouvait écrire :

$\mathbf{f'(x) = \frac{df}{dx}}$ soit $\mathbf{df = f'(x)\cdot dx}$ avec f'(x) nombre dérivé de la fonction f au point d'abscisse x.

Plus f croît avec x, et plus f'(x) est grand. De fait, f'(x) est souvent appelé **taux de variation de la fonction f.**

Généralisons ce principe aux fonctions de 3 variables (x,y,z) :

Soit une fonction scalaire f de valeur au point M(x,y,z) f(x,y,z). Son accroissement au point M'(x+dx,y+dy,z+dz) est donné par sa différentielle :

$$\mathbf{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz}$$

que l'on peut noter plus synthétiquement :

$$\mathbf{df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}}$$

et compte tenu de $\mathbf{\overrightarrow{dOM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}}$

$$\mathbf{df = \overrightarrow{grad}(f)\cdot\overrightarrow{dOM}}$$

en posant : $\boxed{\mathbf{\overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}}}$ appelé **vecteur gradient de f**

Remarque : l'opérateur gradient de note souvent vecteur-opérateur « nabla » $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

2. Interprétation graphique

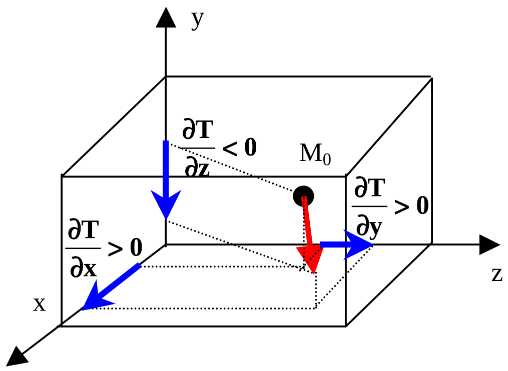
Quelle est la signification physique du vecteur gradient ? Comment l'interpréter ?

Imaginons une pièce dans laquelle la température n'est pas homogène ; elle est donc une fonction de la position considérée, donnée par les trois coordonnées (x,y,z) T(x,y,z). Considérons un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de cette pièce.

- Si la température en M_0 est fortement croissante selon x alors : $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}$ est positif et élevé (taux de variation selon x)
- Si la température en M_0 est faiblement croissante selon y alors $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}$ est positif et faible (taux de variation selon y)
- Si la température en M_0 est fortement décroissante selon z alors $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{M_0}$ est négatif et élevé (taux de variation selon z)

<u>**Bilan :**</u> $\left.\overrightarrow{\mathbf{grad}}(T)\right|_{M_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}_{M_0}$ est donc un vecteur qui pointe : $\begin{cases} \text{fortement vers x croissant donc vers T croissant} \\ \text{faiblement vers y croissant donc vers T croissant} \\ \text{fortement vers z décroissant donc vers T croissant} \end{cases}$

Le vecteur gradient pointe donc vers les zones de croissance de la température



II. Expression dans les autres systèmes de coordonnées

NB : l' expression de l'opérateur gradient en système de coordonnées cartésiennes est relativement simple, mais la prudence est de mise lorsqu'il s'agit de travailler dans un autre système de coordonnées car les choses se compliquent un peu. On évitera en particulier (et à tout prix) d'écrire, par exemple, que le gradient en coordonnées cylindriques prend la forme suivante :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f(\rho,\theta,z)) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \theta}}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

une simple analyse dimensionnelle montre que le second terme est incohérent

1. Système de coordonnées cylindriques

Rappelons la définition géométrique du gradient :

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f)\cdot\overrightarrow{dOM} = \begin{pmatrix}\left[\overrightarrow{\text{grad}}f\right]_\rho \\ \left[\overrightarrow{\text{grad}}f\right]_\theta \\ \left[\overrightarrow{\text{grad}}f\right]_z\end{pmatrix}_{\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_k}\cdot\begin{pmatrix}d\rho\\ \rho d\theta\\ dz\end{pmatrix} \quad \text{(relation 1)}$$

De plus, f étant une fonction des variables ρ, θ et z, on peut développer sa différentielle df :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\theta,z} d\rho + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{\rho,z} d\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\rho,\theta} dz \quad \text{(relation 2)}$$

En identifiant (1) et (2) on tire immédiatement :

$$\left.\begin{array}{l}\left[\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right]_\rho = \dfrac{\partial f}{\partial \rho}\\ \left[\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right]_\theta = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\\ \left[\overrightarrow{\text{grad}}(f)\right]_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_k}$$

Comme pour le système de coordonnées cartésiennes, on peut définir l'opérateur « nabla » : $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$

2. Système de coordonnées sphériques

- **<u>Exercice de cours :</u>** reprendre la démarche précédente afin de déterminer l'expression de l'opérateur gradient dans le système de coordonnées sphériques.

On rappelle que dans ce système : $\overrightarrow{dOM} = dr\cdot\vec{e}_r + rd\theta\cdot\vec{e}_\theta + r\sin\theta\cdot d\varphi\cdot\vec{e}_\varphi$

On doit trouver : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\vec{e}_\varphi}$

L'opérateur « nabla » devient $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$